



2024 II CONCURSO BINACIONAL DE MATEMÁTICA

Perú - Bolivia

Cuarto y Quinto de Secundaria

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración máxima de 1 hora y 30 minutos.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

Parte A. De los problemas del A1 al A10 escoge una alternativa. Solo una es la correcta.

A1 Sea x un número real negativo tal que

$$x^2 + x = 7^2 + 7,$$

calcule el valor de $20 + x$.

(A) 18 (B) 27 (C) 12 (D) 13 (E) 16

- El menor elemento es 2.
- El mayor elemento es 6.
- La suma de todos sus elementos es par.

(A) 4 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 7

A2 Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B . Se escoge un punto D en el lado BC tal que $\angle DAB = \angle ACB = \alpha$ y $\angle DAC = \beta$. Si se sabe que $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, calcule el valor de $\tan \beta$.

(A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

A3 Sean m y n enteros positivos. Se sabe que el número $2 \times 3^n \times 5^m$ tiene exactamente 42 divisores positivos. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número $2^{3n+2} \times 3^m$?

(A) 21 (B) 63 (C) 6 (D) 42 (E) 126

A4 Determine cuántos números enteros x satisfacen las siguientes dos condiciones a la vez:

- $|x - 9| \leq x$.
- $x^2 \leq 10000$.

(A) 93 (B) 94 (C) 95 (D) 96 (E) 97

A5 Determine cuántos conjuntos formados por enteros positivos satisfacen las siguientes propiedades a la vez:

A6 En una bolsa negra hay cinco bolitas que tienen los números 1, 2, 3, 4 y 5. En una bolsa azul hay cinco bolitas que tienen los números 7, 8, 9, 10 y 11. Se escoge al azar una bolita de la bolsa negra y una bolita de la bolsa azul. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sea impar?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{13}{25}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{14}{25}$ (E) $\frac{12}{25}$

A7 Se tiene un rectángulo $ABCD$ y un punto P en su interior. Si $PA = 10$, $PC = 5$ y $PD = 2$. Calcule PB .

(A) 10 (B) 11 (C) 15 (D) 4 (E) 13

A8 Se sabe que la ecuación $x^2 - bx + c = 0$ tiene raíces reales x_1 y x_2 . También se sabe que c es un entero y b es un entero positivo. Si se cumple que $x_1^2 + x_2^2 = 13$. Calcule la suma de todos los posibles valores de b .

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 1

- A9** Sean a y b enteros positivos tales que su producto es igual a

$$2(\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b)).$$

Determine cuántos valores distintos puede tomar $a + b$.

Aclaración: $\text{mcd}(a, b)$ es el máximo común divisor de a y b , mientras que $\text{mcm}(a, b)$ es el mínimo común múltiplo de a y b .

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- A10** Sea $ABCD$ un trapecio de bases paralelas BC y AD , que miden 7 y 13, respectivamente. En el lado AB se escogen los puntos P y Q tales que A, P, Q, B están en ese orden. En el lado DC se escogen los puntos R y S tales que D, R, S y C están en ese orden. Se sabe que QS y PR son paralelos a las bases BC y AD , además, QS y PR dividen al trapecio $ABCD$ en tres trapecios de igual área. Calcule el valor de n si se sabe que QS mide \sqrt{n} .

- (A) 121 (B) 73 (C) 89 (D) 93 (E) 95

Parte B. De los problemas del B1 al B5 escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente y marca los cuatro dígitos en la hoja de respuesta. Si tu respuesta es, por ejemplo, 102 tienes que marcar 0102 y si tu respuesta es 7 tienes que marcar 0007.

- B1** Encuentre el mayor número capicúa de tres dígitos tal que ninguno de sus dígitos es 0 y al multiplicarlos se obtiene un múltiplo de 48.

Aclaración: Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

- B2** ¿Cuántos números de tres dígitos tienen la propiedad de que el dígito de las centenas es menor que el dígito de las unidades?

- B3** Sea $ABCD$ un trapecio de bases paralelas BC y AD que miden 6 y 12, respectivamente. Se sabe que $\angle ABD = 90^\circ$ y que el perímetro del trapecio $ABCD$ es p . Determine la suma de todos los valores enteros que puede tomar p .

- B4** El polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ tiene coeficientes reales y satisface la desigualdad $|P(x)| \leq 5$ para todo $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Determine el mayor valor posible de $8b$.

- B5** Un conjunto está formado por n números reales distintos y tiene la siguiente propiedad: cada elemento del conjunto es igual a la suma de otros tres elementos del conjunto. Determine el menor valor posible de n .