

Parte A.

De los problemas del A1 al A10 escoge una alternativa. Solo una es la correcta.

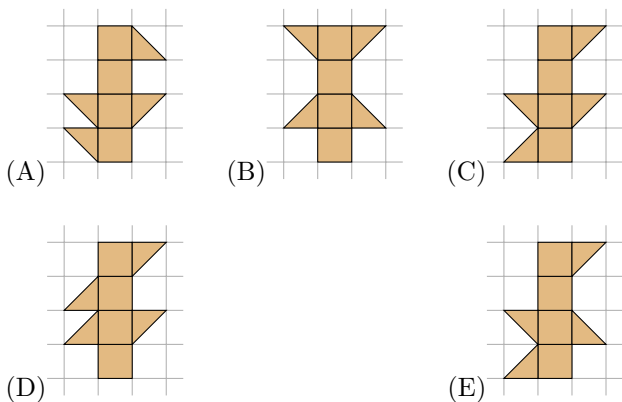
- A1** Si a un número de dos dígitos se le suma su dígito de las unidades, ¿cuál de los siguientes resultados se puede obtener?

(A) 110 (B) 69 (C) 70 (D) 49 (E) 35

- A2** En un videojuego, Leo lanza discos hacia un objetivo. Comienza el juego con 5 discos, y cada vez que acierta un lanzamiento, gana 2 puntos y recibe 3 discos adicionales para seguir jugando. El juego termina cuando ya no le quedan discos por lanzar. Al final de la partida, Leo obtuvo 24 puntos en total. ¿Cuántos discos lanzó durante todo el juego?

(A) 35 (B) 38 (C) 41 (D) 32 (E) 44

- A3** Ana dibuja sobre una hoja cuadriculada las cinco figuras que se muestran. Luego, las recorta por los bordes. ¿Cuál de estas figuras se puede doblar para formar un cubo?



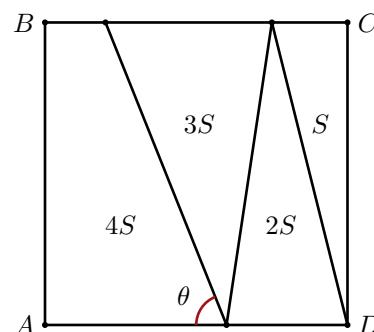
- A4** Decimos que un entero positivo n es *libre de cuadrados* si su único divisor positivo que es cuadrado perfecto es el 1. Por ejemplo, 6 y 10 son libres de cuadrados, pero 12 no lo es.

Determine cuántos enteros positivos libres de cuadrados son divisores de $10!$.

Aclaración: El número 1 es libre de cuadrados. Recuerde que $n!$ es el producto de los primeros n enteros positivos.

(A) 10 (B) 4 (C) 14 (D) 16 (E) 8

- A5** En la figura se observa un cuadrado $ABCD$ el cual está dividido en tres triángulos y un cuadrilátero, cuyas áreas son S , $2S$, $3S$ y $4S$, como se muestra:



Calcule $\tan \theta$.

(A) $\frac{5}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) 3

- A6** En un triángulo se trazaron las tres bisectrices interiores y de esta forma el triángulo quedó dividido en 6 triángulos. De estos 6 triángulos, k son rectángulos. Determine todos los posibles valores de k .

(A) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
(B) 1, 3, 5
(C) 0, 1, 2, 3
(D) 0, 2, 4, 6
(E) 0, 2, 6

- A7** Definimos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots$ de la siguiente forma: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y

$$a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n,$$

para todo entero positivo n . Encuentra el dígito de las unidades de a_{2025} .

(A) 2 (B) 4 (C) 6
(D) 8 (E) 9

- A8** Los siguientes dos polinomios son distintos:

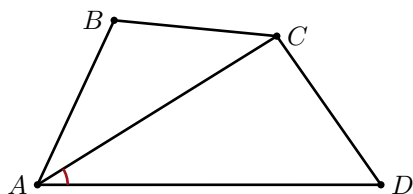
$$P(x) = x^3 + ax^2 - 2bx - 24,$$

$$Q(x) = x^3 + bx^2 - 2ax - 24.$$

Si se sabe que tienen exactamente una raíz en común, encuentra el valor de $a + b$.

(A) 4 (B) 8 (C) 2 (D) 6 (E) 0

- A9** En un cuadrilátero $ABCD$, se tiene que $\angle ABC = 112^\circ$, $\angle BCD = 128^\circ$ y que $AB = BC = CD$. Encuentra el valor de $\angle CAD$.



- (A) 32° (B) 30° (C) 28°
(D) 36° (E) 34°

- A10** José lanza una moneda siete veces. En cada lanzamiento anota el número 1 si la moneda muestra cara o 0 si la moneda muestra sello. En el primer lanzamiento anota el número a_1 , en el segundo lanzamiento anota el número a_2 , y así sucesivamente. Luego, calcula el número

$$P = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5 + a_5 a_6 + a_6 a_7 + a_7 a_1.$$

Si $\frac{m}{n}$ es la probabilidad de que $P \leq 3$, donde m y n son enteros positivos coprimos, encuentra el valor de $n - m$.

Aclaración: en cada lanzamiento de la moneda, la probabilidad de que salga cara o sello es la misma.

- (A) 15 (B) 7 (C) 1 (D) 9 (E) 11

Parte B.

De los problemas del B1 al B5 escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente y marca los cuatro dígitos en la hoja de respuesta. Si tu respuesta es, por ejemplo, 102 tienes que marcar 0102 y si tu respuesta es 7 tienes que marcar 0007.

- B1** Para cada número natural n definimos $S(n)$ como la suma de los dígitos de n . Encuentra el menor valor n para el cual se cumple que

$$S(S(n)) > 9.$$

- B2** Encuentra el valor de

$$A = \frac{24}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1} - \frac{18}{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1}$$

- B3** Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que el ángulo $\angle BAD$ es agudo. Sean E y F los pies de las perpendiculares trazadas desde el vértice C a las rectas AB y AD , respectivamente. Sea P un punto en el segmento AC , de modo que $\angle APD = \angle AFP$, y sea Q un punto en el segmento PC , de modo que $\angle AQB = \angle AEQ$. Si se sabe que $PQ = QC$ y $AP = 12$, encuentra la longitud del segmento AC .

- B4** Un estudiante escribe n enteros positivos diferentes en la pizarra. Luego su profesor borra algunos de los números escritos (posiblemente ninguno, pero no todos) y escribe un signo $+$ o $-$ delante de cada uno de los números restantes y finalmente procede a calcular su suma. Encuentra el menor valor de n para el cual el profesor siempre puede conseguir una suma que sea múltiplo de 2025.

- B5** Se sabe que M es el menor número real tal que

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \leq Mab,$$

para todos los números reales positivos a, b, c que cumplen la condición

$$abc + a + b - c = 0.$$

Si $M = N\sqrt{3} - P$, donde N y P son enteros positivos, encuentra el valor de $N + P$.