IV CONCURSO DE MATEMÁTICA BINARIA 2014 - Primera Etapa

Cuarto y Quinto de Secundaria

De los problemas del A1 al A20 escoge una alternativa. Solo una es la correcta.

1 Hay dos tipos de dragones: plateados y dorados. Cada dragón plateado tiene 4 alas y 3 colas. Cada dragón dorado tiene 2 alas y 4 colas. Un grupo de 30 dragones sobrevoló una ciudad y los habitantes contaron 109 colas en total, ¿cuántas alas hay en total?

(A) 88 (B) 86 (C) 90 (D) 82 (E) 84

2 En las Elecciones Municipales del presente año ocurrió algo muy curioso. En el distrito de Santa María, el candidato que quedó en primer lugar obtuvo 1 voto más que el candidato que quedó en segundo lugar (hubo otros candidatos). Según los resultados oficiales, el candidato que quedó en primer lugar obtuvo el 36,08 % de los votos válidos, y el que quedó en segundo lugar obtuvo el 36 % de los votos válidos. ¿Cuántos votos válidos hubo en total en el distrito de Santa María?

(A) 1800 (B) 1500 (C) 1300 (D) 1200 (E) 1250

3 La distancia de Lima a Huacho es de 150 kilómetros. Pedro salió desde Lima a las 2:00 pm y condujo a una velocidad de 80 km/h en los primeros 60 km. ¿Cuál debe ser su velocidad en lo que queda del viaje para que llegue a Huacho a las 4:00 pm?

(A) 65 km/h (B) 70 km/h (C) 72 km/h
(D) 75 km/h (E) 90 km/h

4 Determine cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación en el conjunto de los números reales:

$$\sqrt{2-x} = 10 + x.$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

5 En un triángulo ABC, sean M, N, P los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Complete la siguiente frase: El circuncentro del triángulo ABC es el __________ del triángulo MNP.

(A) baricentro
(B) incentro
(C) ortocentro
(D) circuncentro
(E) excentro

6 Si un entero positivo tiene exactamente dos divisores positivos es llamado *número primo*, en cambio, si tiene más de dos divisores positivos es llamado *número compuesto*. Determine cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- Todo entero positivo par es compuesto.
- Todo número compuesto es par.
- El número 35 se puede expresar como la suma de dos números primos.
- El número 35 se puede expresar como la suma de dos números compuestos.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7 Se tiene tres números reales a, b, c en progresión aritmética. Si $a + b + c = 15$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 81$, calcule el valor de $a^3 + b^3 + c^3$.

(A) 395 (B) 405 (C) 418 (D) 385 (E) 465

8 Sea $ABCD$ un trapecio de bases paralelas $BC = 10$ y $AD = 14$. En el segmento AB se ubica un punto M y en el segmento CD se ubica un punto N tal que $\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{ND} = 3$. El segmento MN corta a las diagonales AC y BD en los puntos P y Q, respectivamente. Determine la longitud de PQ.

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

9 La razón de la progresión aritmética $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$ es positiva y $t_1 = 1$. Si t_2, t_{10} y t_{34} forman una progresión geométrica (en ese orden), determine el valor de t_{13}.

(A) 5 (B) 4 (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{11}{3}$ (E) 13

10 Si x es un ángulo agudo, simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

(A) $4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ (B) $4 \cdot \operatorname{sen} x$ (C) 2
(D) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ (E) 1

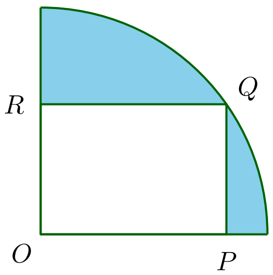
11 A partir de las ecuaciones:

$$m = a \cdot \cos\theta - b \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$n = a \cdot \operatorname{sen}\theta + b \cdot \cos\theta,$$

determine el valor de $\dfrac{m + n \cdot \tan\theta}{n - m \cdot \tan\theta}$ en función de a y b.

(A) $\dfrac{a+b}{a-b}$ (B) $\dfrac{a-b}{a+b}$ (C) $\dfrac{b}{a}$
(D) $\dfrac{a}{b}$ (E) $\dfrac{a+b}{a}$

12 En la figura se muestra un cuadrante de centro O y un rectángulo $OPQR$.



Si $OP = 8$ y $OR = 6$ y el área sombreada es S, determine cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

(A) $24 < S < 26$ (B) $26 \leq S < 28$ (C) $28 \leq S < 30$ (D) $30 \leq S < 32$ (E) $S > 32$

13 Los enteros positivos m y n cumplen que el producto de todos los divisores positivos de 6^n es 6^m. Si m es múltiplo de 23, determine el menor valor posible de n.

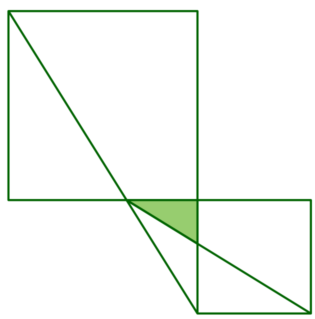
(A) 22 (B) 23 (C) 12 (D) 11 (E) 24

14 Determine el menor entero positivo n que cumple la siguiente propiedad: Si escogemos n vértices cualesquiera de un dodecágono regular, siempre habrán 3 de ellos que sean los vértices de un triángulo rectángulo.

Aclaración: Un dodecágono regular es un polígono regular de 12 lados.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

15 En la siguiente figura se tiene dos cuadrados. Si el área del cuadrado grande es 20 veces el área del triángulo sombreado, determine el resultado de dividir el área del cuadrado grande entre el área del cuadrado pequeño.



(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{20}}{2}$

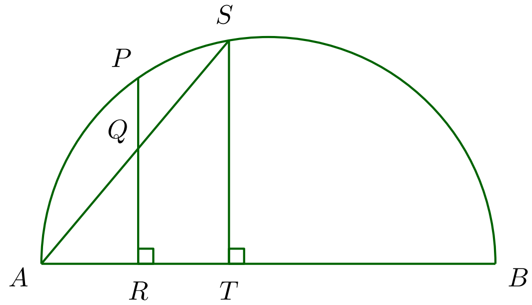
16 El número real positivo a hace que las siguientes dos ecuaciones tengan exactamente una raíz en común:

$$x^3 + x - a = 0$$
$$x^3 + 2x^2 - a = 0$$

Determine cuál de los siguientes números es entero:

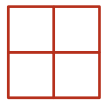
(A) a (B) $\frac{5}{a}$ (C) $2a$ (D) a^2 (E) $\frac{8}{a}$

17 En la figura se muestra una semicircunferencia de diámetro AB. Además, PR y ST son perpendiculares a AB. Si $PQ = AR = RT = 4$, determine la longitud de AB.



(A) 24 (B) 40 (C) 36 (D) 42 (E) 32

18 En cada cuadradito del siguiente tablero se va a escribir uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 de tal forma que si dos cuadraditos comparten un lado entonces los números que contienen son diferentes. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?



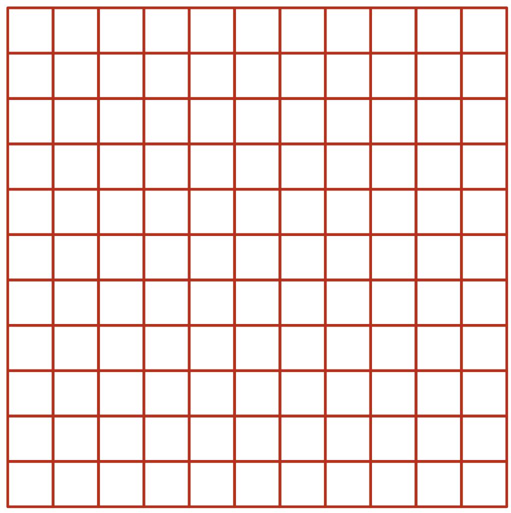
Aclaración: Está permitido repetir números, es decir, un número puede aparecer en más de un cuadradito.

(A) 360 (B) 510 (C) 480 (D) 600 (E) 630

19 Se tiene n enteros positivos consecutivos, donde cada uno tiene 3 dígitos. Si el producto de esos n números es múltiplo de 2014, ¿cuál es el menor valor posible de n?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20 Un conjunto de N torres sobre un tablero es llamada N-amistad si no hay dos torres del conjunto que estén en la misma fila o en la misma columna del tablero. Halle el mayor entero positivo k que tiene la siguiente propiedad: Cualquier distribución de 50 torres sobre un tablero de 11×11 contiene una k-amistad.



Aclaración: Considere que en cada cuadradito (o casilla) del tablero puede ir como máximo una torre.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7