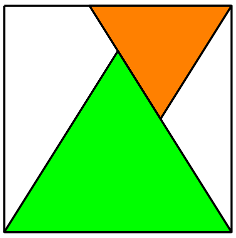
VIII CONCURSO DE MATEMÁTICA BINARIA 2020 - Ronda Final

Cuarto y Quinto de Secundaria

De los problemas del A1 al A10 escoge una alternativa. Solo una es la correcta.

A1 En la figura se muestra dos triángulos equiláteros dentro de un cuadrado. Determine en qué relación están las áreas de esos triángulos.



(A) De 2 a $3\sqrt{3}$ (B) De 1 a 3 (C) De $\sqrt{3}$ a 4
(D) De 1 a 2 (E) De 1 a $\sqrt{3}$

A2 Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\{2,3,4,5\}$ y $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\{3,4,6,7\}$, tales que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son disjuntos. Determine cuántos elementos puede tener $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ como máximo.

(A) 6 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8

A3 A Carlos le gusta comer manzanas, naranjas y plátanos. Cada día él come exactamente dos frutas, las cuales pueden ser: una manzana y una naranja, o una naranja y un plátano, o un plátano y una manzana. Además, en cualesquiera dos días consecutivos, él come los tres tipos de frutas. ¿Como mínimo cuántas naranjas come Carlos durante una semana?

(A) 6 (B) 4 (C) 2 (D) 1 (E) 3

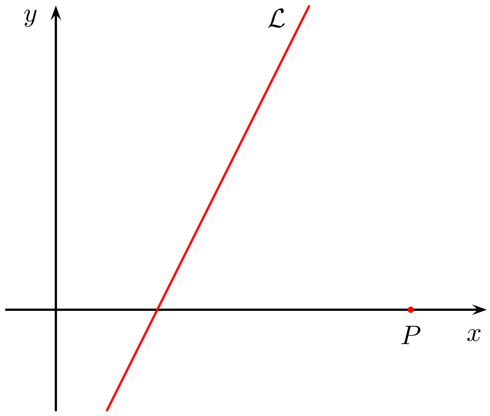
A4 Una piscina puede ser llenada de agua mediante tres llaves: A, B y C. La piscina inicialmente está vacía. Se cumple que

- si solo abrimos la llave A, la piscina tarda 6 horas en llenarse completamente;
- si solo abrimos las llaves A y B, la piscina tarda 4 horas en llenarse completamente;
- si solo abrimos las llaves A y C, la piscina tarda 3 horas en llenarse completamente.

¿Cuántos minutos tardará en llenarse completamente la piscina si abrimos simultáneamente las tres llaves?

(A) 144 minutos (B) 100 minutos (C) 108 minutos
(D) 120 minutos (E) 150 minutos

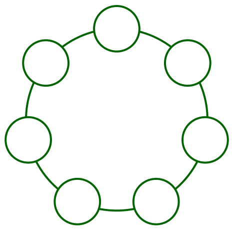
A5 Sobre un plano se dibuja una recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación es $y = 2x - 4$, y además se ubica el punto $P = (7, 0)$, tal como se muestra en la figura.



¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico del punto P con respecto a la recta $\mathcal{L}$?

(A) $(-1, 4)$ (B) $(-2, 5)$ (C) $(0, 7)$
(D) $(0, 4)$ (E) $(0, 6)$

A6 Los números $1, 2, \ldots, 7$ deben ser escritos, en algún orden, en los círculos de la siguiente figura, de modo que para cada uno de los 7 círculos el número escrito en él es un divisor de la suma de los números escritos en sus dos círculos vecinos. Si el número escrito a la derecha del 1 es igual a N, halle todos los valores posibles de N y dé como respuesta la suma de todos esos valores.



(A) 9 (B) 18 (C) 8 (D) 13 (E) 15

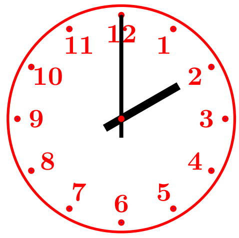
A7 Sea ABC un triángulo rectángulo recto en B. En el lado BC se elige un punto D de modo que $DC = 3BD$. En la hipotenusa se eligen los puntos E y F de modo que $AE = AB$, $CF = CB$ y $\angle DEB = 45°$. En el lado AB se elige un punto G de modo que $\angle BFG = 45°$. Halle $\dfrac{BG}{GA}$.

(A) 4 (B) $\dfrac{9}{2}$ (C) 6 (D) 9 (E) 3

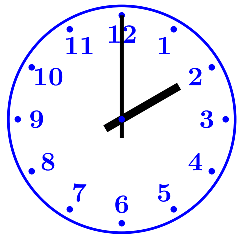
A8 En cada lado de un cuadrado se marcaron 10 puntos rojos, de tal forma que ningún punto rojo es vértice del cuadrado. Se quiere trazar 20 segmentos cuyos extremos sean puntos rojos, de tal forma que cada punto rojo sea extremo de exactamente un segmento, ningún segmento esté incluido en un lado del cuadrado y, además, dos segmentos cualesquiera no se intersequen. Determine el número de formas en que se puede trazar los segmentos de tal manera que se cumplan las condiciones anteriores y dé como respuesta la **suma de los dígitos** de ese número.

(A) 10 (B) 3 (C) 2 (D) 7 (E) 6

A9 Cada uno de los hermanos Ana y Beto tiene un reloj de pared, los cuales están defectuosos. En el reloj de Ana, el minutero da una vuelta completa en 50 minutos, mientras que en el reloj de Beto, el minutero da una vuelta completa en 100 minutos. Resulta que en cierto momento del día, ambos relojes marcaron las 2 : 00. ¿Qué ángulo forman las manecillas del reloj de Beto en el momento en el que las manecillas del reloj de Ana formen, por primera vez, un ángulo de 90°?



Reloj de Ana



Reloj de Beto

(A) 30° (B) 0° (C) 45° (D) 60° (E) 15°

A10 Sean a, b, c números reales no negativos tales que

$$a+b+c=8 \quad \text{y} \quad ab+bc+ca=16.$$

Sea $m = \text{mín}\{ab, bc, ca\}$, entonces el mayor valor posible de m es ...

Aclaración: $\text{mín}\{x, y, z\}$ denota al menor elemento entre los números x, y, z. Por ejemplo, $\text{mín}\{2, 1, 5\} = 1$ y $\text{mín}\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$.

(A) $\frac{16}{9}$ (B) $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (E) 1

Parte B

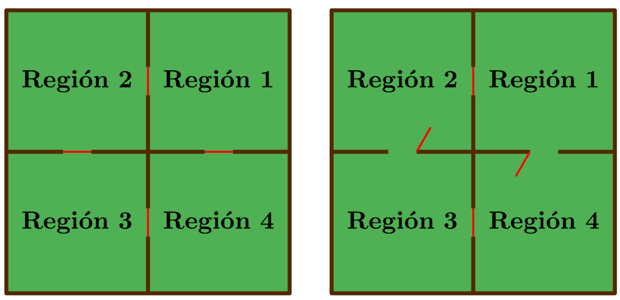
De los problemas del B1 al B5 escribe de forma nítida tu respuesta en el cuadro correspondiente y marca los cuatro dígitos en la hoja de respuesta. Si tu respuesta es, por ejemplo, 102 tienes que marcar 0102 y si tu respuesta es 7 tienes que marcar 0007.

B1 Los siguientes cuatro números reales positivos forman una progresión geométrica (en ese orden):

$$\operatorname{sen}\beta,\ 3\cos\beta,\ 2\tan\beta,\ x.$$

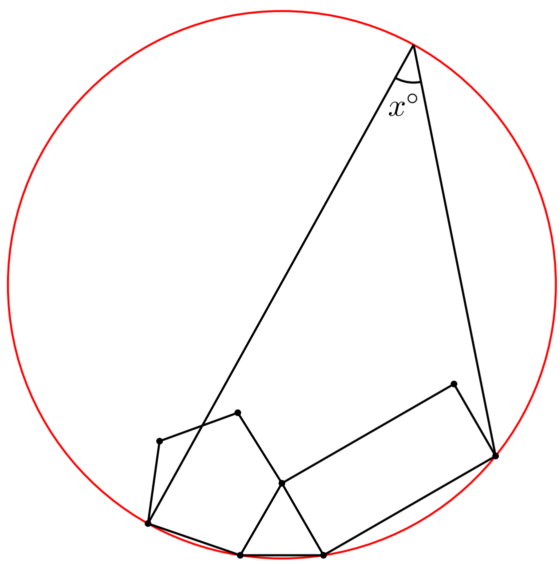
Calcule el valor de x.

B2 Un pastor tiene varias ovejas, las cuales viven en un terreno cuadrado dividido en 4 regiones (enumeradas con 1, 2, 3 y 4). Cada región está cercada por sus cuatro lados, de modo que las ovejas no puedan escapar de su región. Además, hay instaladas 4 puertas, tal como se muestra en el gráfico de la izquierda.



Se sabe que la cantidad de ovejas en la región 1 es el doble de la cantidad de ovejas en la región 2, y que la cantidad de ovejas en la región 3 es el triple de la cantidad de ovejas en la región 4. Cierto día, el pastor olvidó cerrar dos puertas, tal como se muestra en el gráfico de la derecha. Al siguiente día, el pastor al darse cuenta de que había dejado las puertas abiertas, se apresuró a cerrarlas. Ahora, la cantidad de ovejas en la región 2 es el triple de la cantidad de ovejas en la región 1, la cantidad de ovejas en la región 3 es el doble de la cantidad de ovejas en la región 4, y la cantidad total de ovejas en las regiones 1 y 2 es igual a la cantidad total de ovejas en las regiones 3 y 4. ¿Cuál es la menor cantidad posible de ovejas que tiene el pastor?

B3 En la figura se muestra un triángulo equilátero, un pentágono regular y un rectángulo, de tal forma que cada uno de esos polígonos tiene dos vértices sobre la circunferencia mostrada. Calcule el valor de x si el ángulo indicado mide $x°$.



B4 A partir de un número natural, la operación S consiste en sumarle uno de sus dígitos y la operación R consiste en restarle uno de sus dígitos. Por ejemplo, si aplicamos una operación S al número 705 podemos obtener 705, 710 o 712. Si aplicamos una operación R al número 18 podemos obtener 17 o 10.

Andrés empezó con cierto número natural y le aplicó de forma alternada varias operaciones S y R, empezando con una operación S (es decir, $S, R, S, R, \dots$). Luego de esas operaciones él obtuvo el número 1228. Determine el menor valor posible del número con el que empezó Andrés.

B5 Un examen de opción múltiple consta de un total de 4 preguntas y cada pregunta tiene tres posibles respuestas: A, B y C. Varios estudiantes rindieron el examen y, luego de revisar, el profesor se dio cuenta que cualesquiera tres estudiantes tienen al menos una pregunta con tres respuestas diferentes, y que ningún estudiante dejó una o más respuestas en blanco. ¿Cuántos estudiantes, como máximo, rindieron el examen?